

# Dreiecke als Elemente algebraischer Körper

Von KLAUS RUTHENBERG in Bonn

1. **Dreiecke.** Betrachtet werden die Dreiecke des dreidimensionalen euklidischen Raumes. Wir fassen sie zu Klassen äquivalenter Dreiecke zusammen; zur gleichen Klasse sollen alle Dreiecke von gleicher Gestalt, Zentrierung und Stellung gehören. Dabei haben „gleiche Gestalt“ Dreiecke, die zueinander ähnlich sind; ein Dreieck läßt sich auf sechs Arten „zentrieren“, d. h. auf drei Arten läßt sich eine Ecke hervorheben und auf je zwei Arten kann der Umlaufsinn gewählt werden (Fig. 1); Dreiecke gleicher „Stellung“ besitzen parallele Normalen  $a_1 \times a_2$  (Fig. 2).

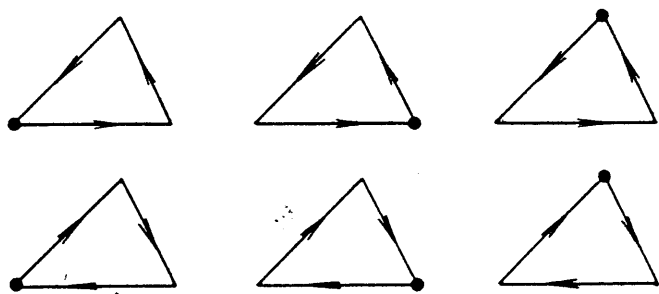


Fig. 1. Die sechs Arten, ein Dreieck zu zentrieren

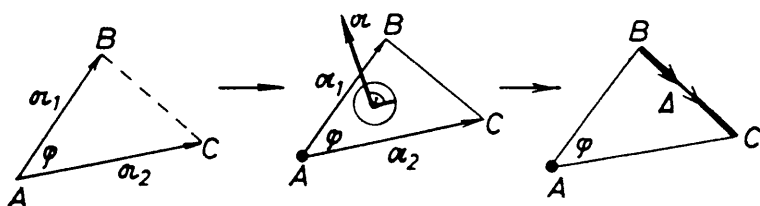


Fig. 2. Das einem Dreieck zugeordnete Zweibein  $a_1, a_2$  der zugehörige wesentliche Vektor  $a$  und die zugeordnete Zahl  $\alpha$

Wenn wir im folgenden von „Dreieck“ sprechen, so ist gemeint eine Klasse äquivalenter Dreiecke im zuvor beschriebenen Sinne. Zu jedem solchen Dreieck gehört ein Vektorenzweibein nach Fig. 2: Zwischen dem bei der Zentrierung ausgewählten Punkt  $A$  und dem durch den (dabei ebenfalls angenommenen) Umlaufsinn

festgelegten „nächsten Punkt“  $B$  wird der Vektor  $a_1$  aufgespannt, zwischen  $A$  und dem dritten Punkt  $C$  des Dreiecks liegt der Spannvektor  $a_2$ .

Als wesentlicher Vektor  $a$  des Dreiecks wird definiert:

$$(1) \quad a := -\frac{a_1 \times a_2}{|a_2|^2} = \frac{a_2 \times a_1}{|a_2|^2}, \quad (a_2 \neq n),$$

wobei  $a_1 \times a_2$  das äußere Produkt zweier Vektoren und  $n$  der Nullvektor ist. Die wesentliche Zahl  $\alpha$  des Dreiecks ist definiert durch

$$(2) \quad \alpha := \frac{a_1 \cdot a_2}{|a_2|^2}, \quad (a_2 \neq n);$$

dabei ist  $a_1 \cdot a_2$  das innere Produkt der Vektoren  $a_1$  und  $a_2$ . Zu jedem unserer Dreiecke (mit  $a_2 \neq n$ ) existiert ein  $a$  und ein  $\alpha$ .

Umgekehrt ist auch jedem  $a \neq n$  und beliebigen reellen  $\alpha$  ein Dreieck zugeordnet: Mit dem Einheitsvektor

$$(3) \quad \frac{a}{|a|} = -\frac{a_1 \times a_2}{|a_1 \times a_2|} \quad (a \neq n)$$

ist die Stellung des Dreiecks und sein Umlaufsinn festgelegt. Und

$$(1^*) \quad |a| = \frac{|a_1|}{|a_2|} \sin \varphi$$

bestimmt zusammen mit

$$(2^*) \quad \alpha = \frac{|a_1|}{|a_2|} \cos \varphi$$

den Öffnungswinkel  $\varphi$  (mit  $0 < \varphi < \pi$ ). Es ist

$$\cot \varphi = \frac{\alpha}{|a|}, \quad \varrho := \frac{|a_1|}{|a_2|} = \frac{|a|}{\sin \varphi}.$$

Öffnungswinkel  $\varphi$  und Seitenverhältnis  $\varrho$  legen aber die Gestalt des Dreiecks fest. Jedes unserer „Dreiecke“ wird also durch ein Paar

$$\Delta = (\alpha|a) \quad (a \neq n),$$

bestehend aus einem Vektor  $a$  ( $\neq n$ ) und einer reellen Zahl  $\alpha$  charakterisiert.

Den Fall  $a = n$  werden wir in den folgenden Betrachtungen mit einbeziehen; hier ist die Deutung einfacher und als Grenzfall (Entartungsfall) der Dreiecke aufzufassen

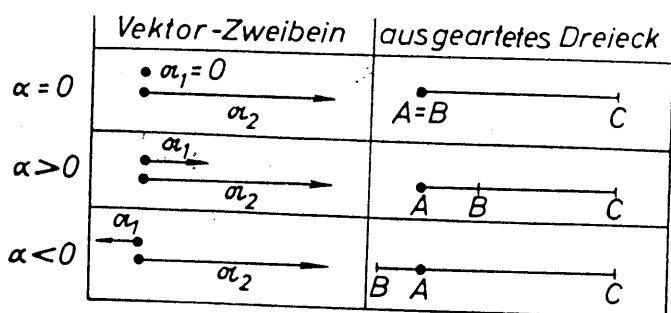


Fig. 3. Die ausgearteten Dreiecke  $(\alpha, n)$ ,  $a_2 \neq n$  beliebig vorgegeben

(Fig. 3): Wir gehen von einem beliebigen  $a_2 \neq n$  aus. Ist  $\alpha = 0$ , so finden wir  $|a_1| = 0$ , d.h.  $a_1 = n$ ; wäre  $|a_1| \neq 0$ , so hätte man in (2\*)  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , was in (1\*) auf  $|a| \neq 0$  führte und einen Widerspruch zur Annahme darstellte; mit  $a_1 = n$  ist (1) und (2) auch erfüllt. Bei  $\alpha \neq 0$  folgt aus (2\*)  $|a_1| \neq 0$  und  $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ , dies seinerseits erbringt mit (1\*)  $\varphi = 0$  oder  $\varphi = \pi$ , d.h.  $a_1 = \lambda a_2$  ( $\lambda \neq 0$ ). In (2\*) eingesetzt, ergibt sich

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = 0: \alpha = |\lambda| > 0 \\ \varphi = \pi: \alpha = -|\lambda| < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a_1 = \alpha a_2;$$

(1) und (2) werden offenbar erfüllt.

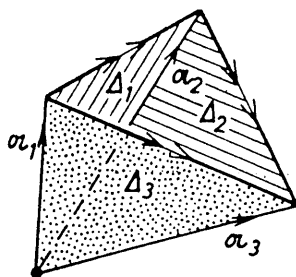
Zusammenfassend läßt sich sagen: Jedem Paar

$$\Delta = (\alpha|a)$$

( $\alpha$  eine beliebige reelle Zahl,  $a$  ein beliebiger Vektor des  $R_3$ ) ist eins unserer „Dreiecke“ zugeordnet, sei es nun ein echtes oder ein unechtes Dreieck.

**2. Die Multiplikation von Dreiecken.** Zwei Dreiecke  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  lassen sich immer so aneinanderlegen, daß die 1. Seite von  $\Delta_2$  mit der 2. Seite von  $\Delta_1$  zusammenfällt.

Dies geht auf genau eine Weise. Zwei so zusammengelegte Dreiecke spannen eine räumliche Ecke auf (Fig. 4). Mit  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  ist die dritte Seite  $\Delta_3$  dieser Ecke eindeutig bestimmt. Wir schreiben



$$(4) \quad \Delta_3 = \Delta_1 \circ \Delta_2.$$

Diese zweistellige Relation wird erfaßt durch

$$(5) \quad \Delta_3 = (\gamma|c) = (\alpha\beta - a \cdot b | \alpha b + \beta a + a \times b),$$

Fig. 4. Geometrische Deutung von  $\Delta_1 \circ \Delta_2 = \Delta_3$  wenn  $\Delta_1 = (\alpha|a)$  und  $\Delta_2 = (\beta|b)$ .

Der Beweis werde geführt unter Benutzung bekannter Entwicklungssätze für das innere und äußere Produkt.

$$a) \quad \alpha\beta - a \cdot b = \frac{a_1 \cdot a_2}{|a_2|^2} \cdot \frac{a_2 \cdot a_3}{|a_3|^2} - \frac{a_1 \times a_2}{|a_2|^2} \cdot \frac{a_2 \times a_3}{|a_3|^2}$$

geht wegen

$$(t \times u) \cdot (v \times w) = (t \cdot v)(u \cdot w) - (u \cdot w)(t \cdot v)$$

über in

$$\begin{aligned} \alpha\beta - a \cdot b &= \frac{1}{|a_2|^2 \cdot |a_3|^2} \{ (a_1 \cdot a_2) (a_2 \cdot a_3) - (a_1 \cdot a_2) (a_2 \cdot a_3) + (a_2 \cdot a_2) (a_1 \cdot a_3) \} = \\ &= \frac{a_1 \cdot a_3}{|a_3|^2} = \gamma. \end{aligned}$$

b) Zunächst folgt unter Benutzung von

$$(t \times u) \times (v \times w) = (t u w) v - (t u v) w,$$

daß

$$\begin{aligned} (6) \quad \alpha b + a\beta + a \times b &= \frac{1}{|a_2|^2 \cdot |a_3|^2} \{ - (a_1 \cdot a_2) (a_2 \times a_3) - (a_1 \times a_2) (a_2 \cdot a_3) \\ &+ (a_1 \times a_2) \times (a_2 \times a_3) \} = \frac{1}{|a_2|^2 \cdot |a_3|^2} \{ - (a_1 \cdot a_2) (a_2 \times a_3) \\ &- (a_1 \times a_2) (a_2 \cdot a_3) + (a_1 a_2 a_3) a_2 \}. \end{aligned}$$

Zur Abkürzung werde gesetzt

$$(7) \quad \xi := \alpha b + a\beta + a \times b.$$

Die innere Multiplikation mit  $a_1, a_2, a_3$  führt auf

$$\begin{aligned} \xi \cdot a_1 &= 0, \\ \xi \cdot a_3 &= 0, \\ \xi \cdot a_2 &= \frac{(a_1 a_2 a_3)}{|a_3|^2}. \end{aligned}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen schließt man auf

$$\xi = \lambda \cdot a_1 \times a_3,$$

so daß

$$\xi \cdot a_2 = -\lambda (a_1 a_2 a_3) = \frac{(a_1 a_2 a_3)}{|a_3|^2}.$$

Bei  $(a_1 a_2 a_3) \neq 0$  folgt daraus

$$\lambda = -|a_3|^{-2},$$

also die Behauptung

$$\xi = -\frac{a_1 \times a_3}{|a_3|^2} = c.$$

Auch bei  $(a_1 a_2 a_3) = 0$  läßt sich der Beweis führen, indem man

$$a_3 = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2$$

in (6) einführt.

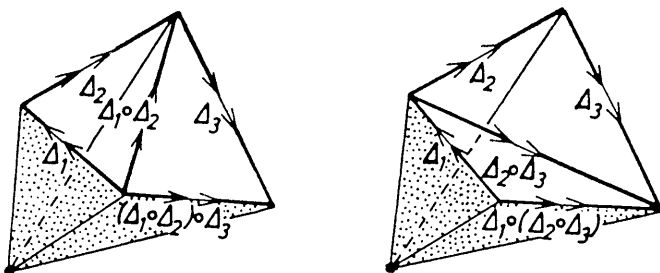


Fig. 5. Geometrischer Beweis für die Gültigkeit des Assoziativgesetzes

$$(\Delta_1 \circ \Delta_2) \circ \Delta_3 = \Delta_1 \circ (\Delta_2 \circ \Delta_3)$$

**3. Die Gruppeneigenschaft der  $\circ$  Verknüpfung.** Es bleibt zu zeigen, daß die Paare bezüglich der für sie in (5) erklärten Multiplikation eine Gruppe bilden, wenn man  $(0|\mathfrak{n})$  ausschließt. Man sieht durch Einsetzen in (5) sofort, daß  $(1|\mathfrak{n})$  das neutrale Element ist. Die Gültigkeit des Assoziativgesetzes folgt anschaulich mit Fig. 5; rechnerisch weist man sie mit dem Entwicklungssatz

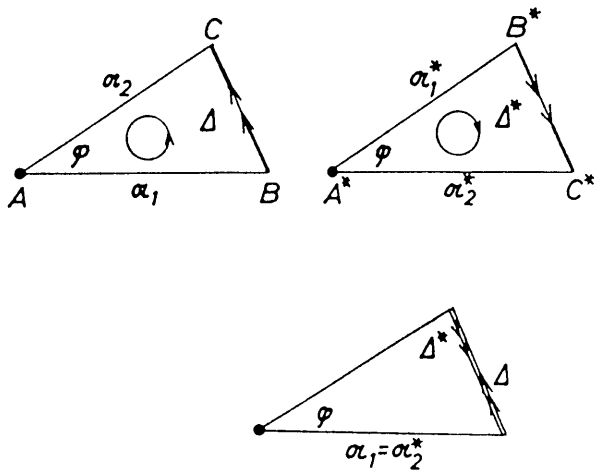


Fig. 6. Geometrische Deutung von  $\Delta \circ \Delta^* = (1|\mathfrak{n})$

$$u \times (v \times w) = (u \cdot w) \cdot v - (u \cdot v) \cdot w$$

nach.

Die geometrische Bedeutung der Multiplikation der Paare gestattet leicht die Konstruktion des inversen Elementes, denn inverse Dreiecke unterscheiden sich nur durch den Richtungssinn ihres Stellungsvektors (Fig. 6). Hat  $\Delta$  das Seitenverhältnis  $\varrho$ , so hat  $\Delta^*$  das Verhältnis  $\varrho^{-1}$  und wegen  $\varphi = \varphi^*$  folgt

$$\begin{aligned} |a^*| &= \varrho^{-1} \cdot \sin \varphi = |a| \cdot \varrho^{-2}, \\ \alpha^* &= \varrho^{-1} \cdot \cos \varphi = \alpha \cdot \varrho^{-2}, \end{aligned}$$

so daß wegen  $\varrho^2 = \alpha^2 + a^2$ :

$$(8) \quad (\alpha | a)^* = \left( \frac{\alpha}{\alpha^2 + a^2} \mid \frac{-a}{\alpha^2 + a^2} \right).$$

Durch Nachrechnen bestätigt man, daß dieses Element  $\Delta^*$  invers zu  $\Delta$  ist.

Die Rechnung zeigt ebenso wie die Anschauung die Ungültigkeit des Kommutativ-Gesetzes.

**4. Die Addition von Dreiecken.** Eine zweite Verknüpfung werde erklärt durch

$$(\alpha | a) * (\beta | b) = (\alpha + \beta | a + b),$$

wobei  $+$  sowohl die Addition von Zahlen als auch von Vektoren bezeichnet. Diese Verknüpfung gestattet keine einfache geometrische Deutung anhand der Dreiecke, ist aber algebraisch naheliegend. Man zeigt leicht, daß die Dreiecke bezüglich dieser Verknüpfung eine Abel-Gruppe bilden. Ebenso folgt ohne besondere Voraussetzungen, daß beide Verknüpfungen distributiv sind:

$$(\Delta_1 * \Delta_2) \circ \Delta_3 = \Delta_1 \circ \Delta_3 * \Delta_2 \circ \Delta_3.$$

Die Dreiecke bilden also bezüglich  $\circ$  und  $*$  einen Schiefkörper.

**5. Koordinatendarstellung.** Die Vektoren seien bezogen auf eine orthonormierte Basis:

$$a = \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 \mathfrak{f}.$$

Für  $\alpha$  werde im folgenden  $\alpha_0$  geschrieben, so daß

$$(\alpha | a) = (\alpha_0 | \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 \mathfrak{f}).$$

Aus den Schiefkörper-Axiomen und der Definition von  $\circ$  bzw.  $*$  folgt

$$\begin{aligned} (\alpha | a) &= (\alpha_0 | \mathfrak{n}) * (0 | \alpha_1 i) * (0 | \alpha_2 j) \\ &* (0 | \alpha_3 \mathfrak{f}) = (\alpha_0 | \mathfrak{n}) * (\alpha_1 | \mathfrak{n}) \\ &\circ (0 | i) * (\alpha_2 | \mathfrak{n}) \circ (0 | j) \\ &* (\alpha_3 | \mathfrak{n}) \circ (0, \mathfrak{f}). \end{aligned}$$

Schreibt man für  $*$  und  $\circ$  einfacher  $+$  und  $\cdot$ ; ersetzt man  $(0 | i)$  durch  $i$ ;  $(\alpha_0 | \mathfrak{n})$  durch  $\alpha_0$  usw., so gilt

$$(9) \quad (\alpha | a) = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 \mathfrak{f}.$$

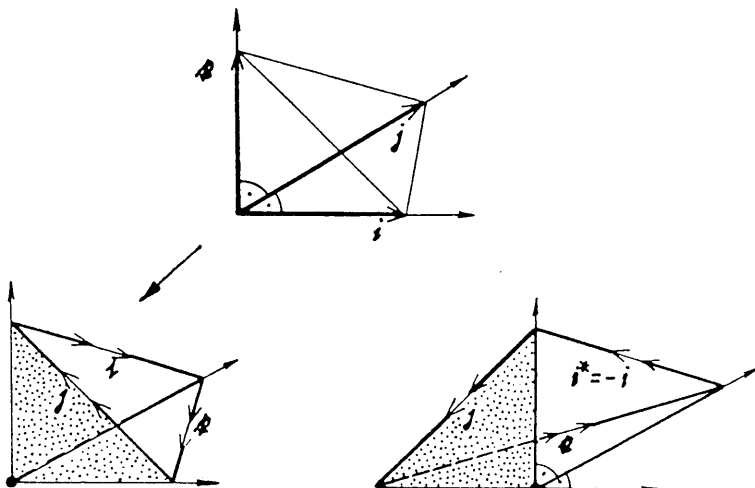


Fig. 7. Beispiele für Dreiecksmultiplikationen

$$\begin{aligned} (-i) \circ j &= -\mathfrak{f} \Rightarrow i \circ j = \mathfrak{f} & j \circ i &= -\mathfrak{f} \\ \mathfrak{f} \circ (-i) &= -j \Rightarrow \mathfrak{f} \circ i = j & i \circ \mathfrak{f} &= -j \\ & & j \circ \mathfrak{f} &= i & \mathfrak{f} \circ j &= -i \end{aligned}$$

Aus der Definition der Multiplikation und den Eigenschaften des äußeren Produkts folgen die Produkte der Basisvektoren:

	i	j	k
i	-1	k	-j
j	-k	-1	i
k	j	-i	-1

Jedes Element dieser Tabelle läßt sich auch unmittelbar anschaulich durch das Aneinanderlegen von Dreiecken gewinnen (Fig. 7).

Der Schiefkörper der Dreiecke ist *isomorph* zum Schiefkörper der Quaternionen.

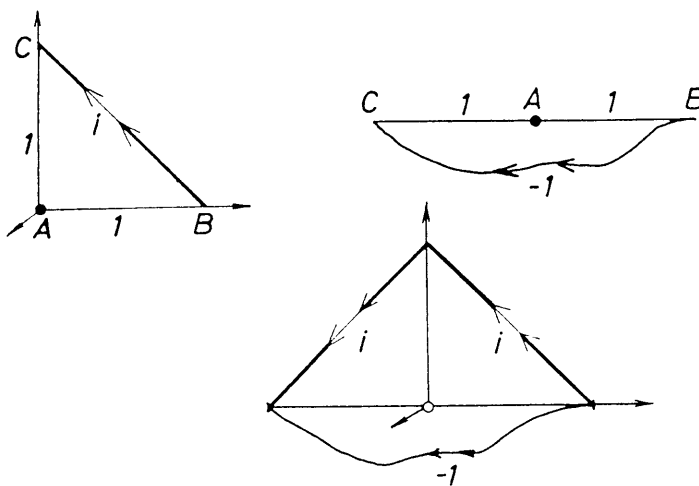
Wir schreiben auch in „Polarkoordinaten“ ein Dreieck (eine Quaternion) in der Form

$$(10) \quad (\alpha | a) = \rho (\cos \varphi + j \sin \varphi),$$

wo  $\rho$  das Seitenverhältnis,  $\varphi$  den Öffnungswinkel und  $j$  den Stellungsvektor des Dreiecks mit  $j \circ j = -1$  bedeutet.

**6. Unterkörper.** Man zeigt leicht: Zwei Dreiecke  $(\alpha | a)$  und  $(\beta | b)$  sind bei der Multiplikation genau dann vertauschbar, wenn  $a$  und  $b$  linear abhängig sind. Dreiecke, deren Stellungsvektoren kollinear sind, bilden also jeweils einen kommutativen Unterkörper. Jeder dieser Körper ist isomorph zum Körper der komplexen Zahlen. Dreiecke eines solchen Unterkörpers kann man immer in eine (Gaußsche) Ebene bringen.

**7. Zusammenfassung.** Unter Berücksichtigung neuerer Gesichtspunkte wurde der historisch gegebene Zusammenhang zwischen Vektor- und Quaternionen-Rechnung wieder ins Blickfeld gerückt. Didaktisch zeigte sich: Die Quaternionen lassen sich



geometrisch als Dreiecke einführen, die algebraisch durch ein Paar, bestehend aus Zahl und Vektor, charakterisiert sind. Die geometrische Darstellung in einem vierdimensionalen Vektorraum erübrigt sich so. Formal vollzieht sich die Einführung in Analogie zur Einführung der komplexen Zahlen als Paare reeller Zahlen. Man kann die Schiefkörper-Axiome deduzieren, indem man sich auf das Rechnen mit reellen Zahlen und Vektoren bezieht. Alle Axiome der Multiplikation lassen sich auch anschaulich gewinnen.

Fig. 8. Erläuterungen zu  $(0 | i) \circ (0 | i) = (-1 | n)$  mit den Repräsentanten  $a_1 = k, a_2 = j$  bzw.

$$a_1' = j, a_2' = -k$$

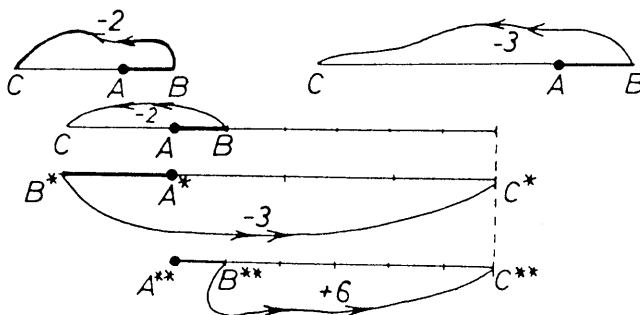


Fig. 9. Darstellung von  $(-2 | n) \circ (-3 | n) = (+6 | n)$

Geht man davon aus, daß der Begriff des Vektors anschaulicher ist als jener der Verschiebung, so mag die Erfahrung des Verfassers plausibel sein: Der hier benutzte Begriff des Dreiecks ist anschaulicher als der Begriff der Drehstreckung. Dies zeigt sich nicht nur bei der Behandlung der Quaternionen, sondern auch bereits bei der geometrischen Einführung der komplexen Zahlen (Fig. 8). Die Schüler sagen: Bei der Deutung

der Zahlen als Dreiecke sind die nicht-reellen Zahlen anschaulicher als die reellen, denn diesen entsprechen ausgeartete Dreiecke mit einem Öffnungswinkel von  $0^\circ$  bzw.  $180^\circ$ .

Die Einführung der Addition ganzer Zahlen unter Benutzung des geometrischen Modells der Vektoraddition ist didaktisch anerkannt. Ihr entspräche das Modell der Dreiecksmultiplikation zur Motivierung der Multiplikationsregeln ganzer Zahlen nach Fig. 9. Legt man die erste Seite des „Dreiecks“ ( $-3$ ) an die zweite Seite des „Dreiecks“ ( $-2$ ), so ergibt sich als Resultat das „Dreieck“ ( $+6$ ).